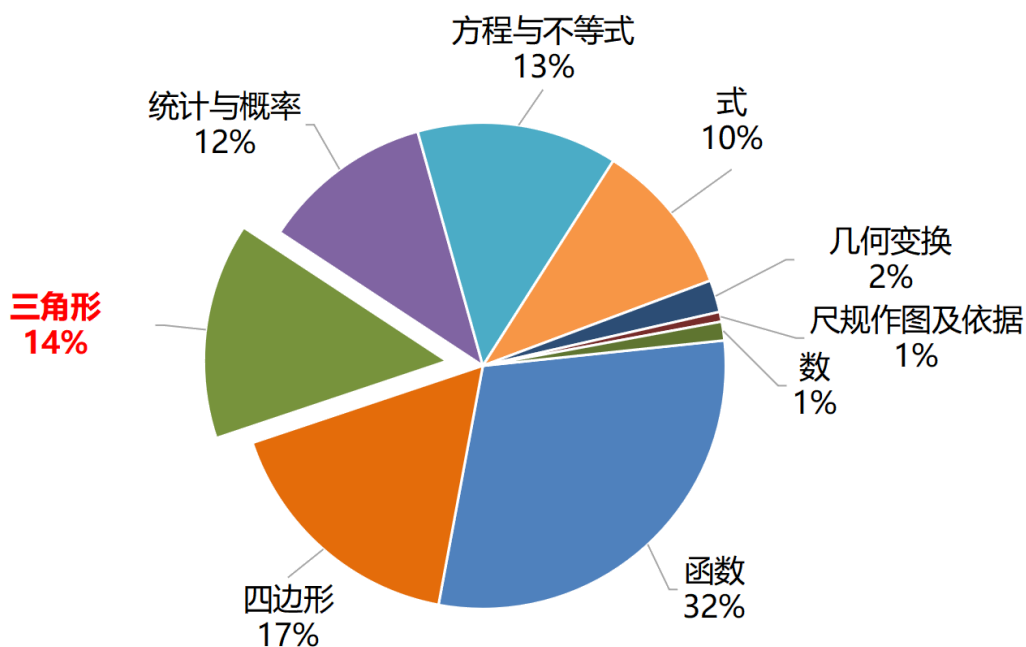


第1讲 勾股定理与逆定理

勾股定理属于人教版第十七章的内容，是期中、期末考试的必考知识点，故这部分我们分为《勾股定理初步》、《勾股定理进阶》两个模块。本模块为《勾股定理初步》，旨在帮助学生了解并熟练掌握勾股定理、逆定理及其简单应用，为《勾股定理进阶》奠定基础。

本模块难度中等，适用于勾股定理、逆定理的基础巩固及勾股定理、逆定理的短期突破，本模块分为勾股定理与逆定理、勾股定理综合应用2讲内容，配套练习册共48题，帮助学生熟悉勾股部分常见题型，理清解题思路，学会利用数学思想解决问题。





- ★勾股定理
- ★勾股定理逆定理
- ★勾股定理、逆定理应用

后续

- ※勾股定理综合应用
- ※勾股定理求最值
- ※特殊角度的直角三角形
- ※直角三角形存在性
- ※勾股定理求两点间距离

一、勾股定理

勾股定理

在直角三角形 ABC 中, $\angle A$ 所对的边为: _____,
 $\angle B$ 所对的边为: _____, $\angle C$ 所对的边为: _____.

如果直角三角形的两条直角边长分别为 a 、 b , 斜边长为 c , 那么
_____.
即直角三角形中_____. (文字)

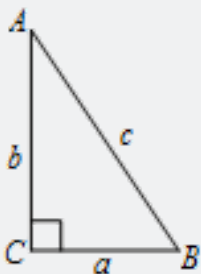
常见勾股数

【教法备注】

1、在直角三角形 ($Rt_{\triangle}$) ABC 中, $\angle A$ 所对的边为: a , $\angle B$ 所对的边为: b , $\angle C$ 所对的边为: c .

2、如果直角三角形的两条直角边长分别为 a 、 b , 斜边长为 c , 那么 $a^2 + b^2 = c^2$.

即直角三角形中两条直角边的平方和等于斜边的平方.



如图所示: 勾——短直角边(a), 股——长直角边(b), 弦——斜边(c).

注意:

①勾股定理只适用于直角三角形, 而不适用与锐角三角形和钝角三角形, 所以常作辅助线——高, 构造直角三角形.

②为方便应用勾股定理进行计算, 常将 $a^2 + b^2 = c^2$ 进行如下变形:

$$a^2 = c^2 - b^2; b^2 = c^2 - a^2;$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}; b = \sqrt{c^2 - a^2}; c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3、常见勾股数：

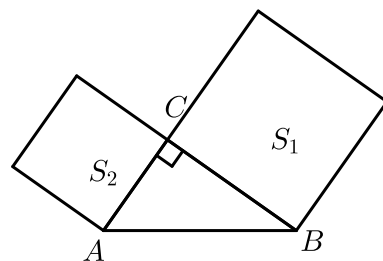
① 3, 4, 5; ② 6, 8, 10; ③ 9, 12, 15; ④ 5, 12, 13; ⑤ 7, 24, 25; ⑥ 8, 15, 17.

例题

【知识点拨】

利用勾股定理解题时一要确定直角三角形，二要分清直角边和斜边．这部分刚开始练习中，学生有时看到三角形就应勾股定理，但实际上并不是直角三角形，所以要强调：**利用勾股定理解题时一要确定直角三角形，二要分清直角边和斜边**．勾股定理反应的是线段间的平方关系，证明线段间的平方关系可以考虑勾股定理．

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 15$ ，分别以 AC ， BC 为边向 $\triangle ABC$ 外作正方形，两个正方形的面积分别记为 S_1 ， S_2 ，则 $S_1 + S_2$ 等于（ ）．



A. 30

B. 150

C. 200

D. 225

【答案】D

【解析】 $\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$\because AB = 15$,

$\therefore AC^2 + BC^2 = 225$,

$\because S_1 = BC^2$, $S_2 = AC^2$,

$\therefore S_1 + S_2 = BC^2 + AC^2$,

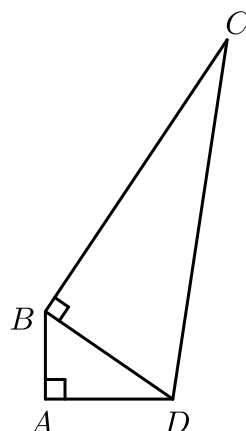
$\therefore S_1 + S_2 = 225$.

故选D.

【标注】【知识点】勾股定理的综合应用

【重点强调】

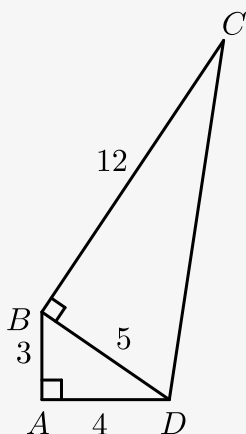
2. 如图，若 $\angle BAD = \angle DBC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AD = 4$ ， $BC = 12$ ，则 $CD = (\quad)$.



- A. 5 B. 13 C. 17 D. 18

【答案】 B

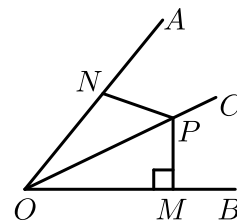
【解析】



$\because AB = 3$ ， $AD = 4$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BAD$ 中， $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，
 又 $\because BC = 12$ ， $\angle DBC = 90^\circ$ ，
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中， $CD = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.
 故选B .

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

3. 如图， OC 平分 $\angle AOB$ ，点 P 是 OC 上一点， $PM \perp OB$ 于点 M ，点 N 是射线 OA 上的一个动点，若 $OM = 4$ ， $OP = 5$ ，则 PN 的最小值为 $(\quad)$.



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 B

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

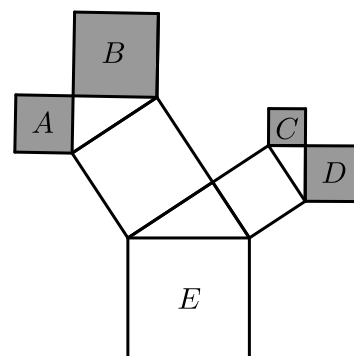
【重点强调】

此题涉及到角平分线，可以复习一下角平分线的性质和判定

2016~2017学年天津宁河县初二下学期期中第14题3分

练习

4. 如图是一株美丽的勾股树，其中所有的四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形．若正方形 A 、 B 、 C 、 D 的边长分别是 3、5、2、3，则最大正方形 E 的面积是（ ）．



A. 13

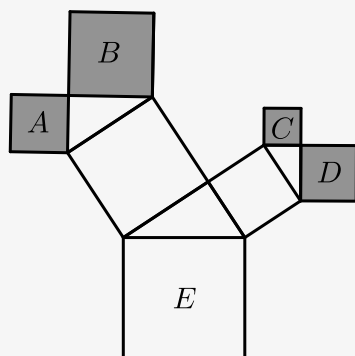
B. 26

C. 47

D. 94

【答案】 C

【解析】



由勾股定理得，

正方形 F 的面积=正方形 A 的面积+正方形 B 的面积= $3^2 + 5^2 = 34$ ，

同理，正方形 G 的面积=正方形 C 的面积+正方形 D 的面积= $2^2 + 3^2 = 13$ ，

$\therefore$ 正方形 E 的面积=正方形 F 的面积+正方形 G 的面积= 47 ．

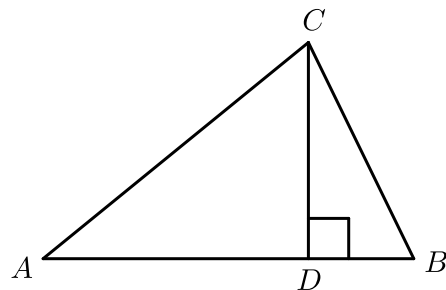
故选：C ．

【标注】【知识点】勾股树

【重点强调】

2017~2018学年3月天津河北区木斋中学初二下学期月考第4题3分

5. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $CD \perp AB$ 于 D ， $AC = 20$ ， $BC = 15$ ， $DB = 9$ ．



(1) 求 DC 的长 ．

(2) 求 AB 的长 ．

【答案】(1) $CD = 12$ ．

(2) $AB = 25$ ．

【解析】(1) $\because CD \perp AB$ 于 D ，且 $BC = 15$ ， $BD = 9$ ， $AC = 20$ ，

$$\therefore \angle CDA = \angle CDB = 90^\circ ,$$

$$\text{在Rt}\triangle CDB\text{中}, CD^2 + BD^2 = CB^2 ,$$

$$\therefore CD^2 + 9^2 = 15^2 ,$$

$$\therefore CD = 12 .$$

(2) 在 $\text{Rt}\triangle CDA$ 中， $CD^2 + AD^2 = AC^2$ ，

$$\therefore 12^2 + AD^2 = 20^2 ,$$

$$\therefore AD = 16 ,$$

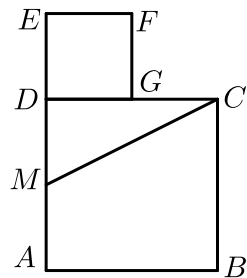
$$\therefore AB = AD + BD = 16 + 9 = 25 .$$

【标注】【知识点】方程思想在勾股定理的应用

【重点强调】

2017~2018学年天津河东区初二下学期期末第三学区第21题

6. 如图，在边长为2的正方形 $ABCD$ 中， M 为边 AD 的中点，延长 MD 至点 E ，使 $ME = MC$ ，以 DE 为边作正方形 $DEFG$ ，点 G 在边 CD 上，则 DG 的长为（ ）。



- A. $\sqrt{3} - 1$ B. $3 - \sqrt{5}$ C. $\sqrt{5} + 1$ D. $\sqrt{5} - 1$

【答案】D

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， M 为边 DA 的中点，

$$\therefore DM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}DC = 1,$$

$$\therefore CM = \sqrt{DC^2 + DM^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore ME = MC = \sqrt{5}.$$

$$\therefore ED = EM - DM = \sqrt{5} - 1.$$

$\because$ 四边形 $EDGF$ 是正方形，

$$\therefore DG = DE = \sqrt{5} - 1.$$

【标注】【知识点】正方形的性质

【重点强调】

2016~2017学年天津红桥区初二下学期期中第9题3分

|| 例题

7. 已知一个直角三角形的两边的长分别是3和4，则第三边长为 _____。

【答案】5或 $\sqrt{7}$

【解析】①长为3的边是直角边，长为4的边是斜边时：

$$\text{第三边的长为：}\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}.$$

②长为3、4的边都是直角边时：

$$\text{第三边的长为：}\sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

【标注】【知识点】已知两边求第三边-分类讨论

【重点强调】

解题思路：需要分类讨论第三边（为直角边、为斜边）

练习

8. 已知直角三角形的三边长分别为5、12、 x ，则 $x =$ _____ .

【答案】13或 $\sqrt{119}$

【解析】当5和12都是直角边时，则第三边是 $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ ，

当12是斜边时，则第三边是 $\sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{119}$.

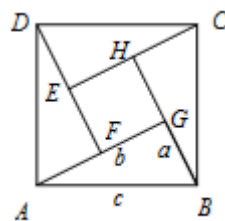
故答案为：13或 $\sqrt{119}$.

【标注】【知识点】已知两边求第三边-分类讨论

二、勾股定理的证明

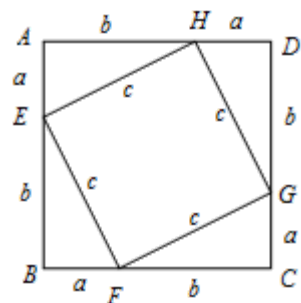
1. 赵爽的“勾股圆方图”（又称“赵爽弦图”）：

如图是由4个全等的直角三角形拼成的大正方形，直角三角形的两条直角边长分别为 a ， b （ $b > a$ ），斜边为 c ，中间是小正方形，且边长为 $(b - a)$.



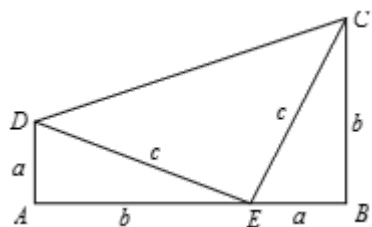
2. 邹元治的证明：

如图是由4个全等的直角三角形拼成的大正方形，直角三角形的两条直角边分别为 a ， b ，斜边为 c ，中间是小正方形，且边长为 c .



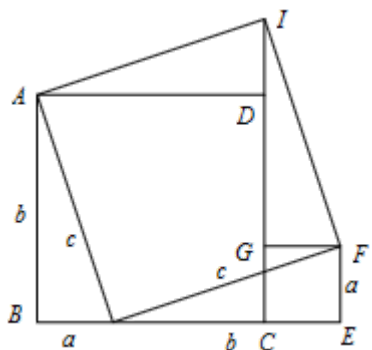
3. 1976年美国总统詹姆斯·加菲尔德的证明：

如图是由2个全等的直角三角形（以 a 、 b 为直角边，以 c 为斜边）和一个等腰直角三角形（以 c 为直角边）拼成的直角梯形。



4. 陈杰的证明：

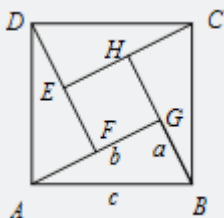
如图，图中有4个全等的直角三角形（以 a 、 b 为直角边，以 c 为斜边），3个正方形，边长分别为 a 、 b 、 c ，设整个图形面积为 S 。



【教法备注】

①赵爽的“勾股圆方图”（又称“赵爽弦图”）

如图是由4个全等的直角三角形拼成的大正方形，直角三角形的两条直角边长分别为 a 、 b （ $b > a$ ），斜边为 c ，中间是小正方形，且边长为 $(b - a)$ 。



证明：

由图可得 $S_{\text{四边形}ABCD} = c^2$ ，

易证四边形 $EFGH$ 为正方形，

$\therefore EF = FG = GH = HE = (b - a)$ ，

$\therefore S_{\text{四边形}EFGH} = (b - a)^2$ ，

又 $\because S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCH} = S_{\triangle CDE} = S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2}ab$ ，

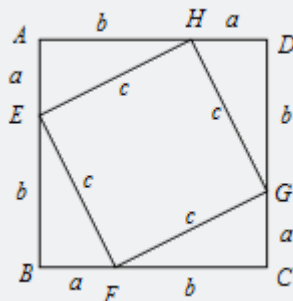
$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 4S_{\triangle ADF} + S_{\text{四边形}EFGH} = 4 \times \frac{1}{2}ab + (b - a)^2$ ，

$\therefore c^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + (b - a)^2$ ，

整理得： $a^2 + b^2 = c^2$

②邹元治的证明：

如图是由4个全等的直角三角形拼成的大正方形，直角三角形的两条直角边分别为 a 、 b ，斜边为 c ，中间是小正方形，且边长为 c 。



证明：

由图可得四边形 $ABCD$ 的边长 $AD = AH + HD = b + a$ ，

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = (a + b)^2$ ，

$S_{\triangle AEH} = S_{\triangle HDG} = S_{\triangle EBF} = S_{\triangle FCG} = \frac{1}{2}ab$ ，

$S_{\text{四边形}EFGH} = c^2$ ，

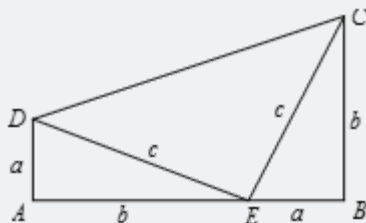
$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 4S_{\triangle AEH} + S_{\text{四边形}EFGH} = 4 \times \frac{1}{2}ab + c^2$ ，

$\therefore (a + b)^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + c^2$ ，

$\therefore a^2 + b^2 = c^2$

③1976年美国总统詹姆斯·加菲尔德的证明：

如图是由2个全等的直角三角形（以 a 、 b 为直角边，以 c 为斜边）和一个等腰直角三角形（以 c 为直角边）拼成的直角梯形。

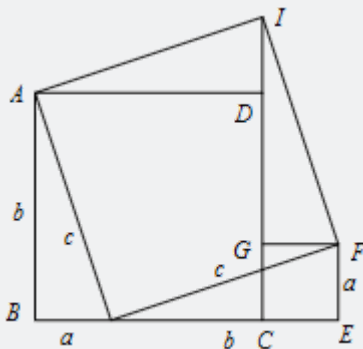


证明：

$$\begin{aligned}\therefore S_{\text{梯形}} &= \frac{1}{2}(a+b) \cdot (a+b) = \frac{1}{2}(a+b)^2, \\ S_{\text{梯形}} &= 2S_{\triangle ADE} + S_{\triangle DEC} = 2 \cdot \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = ab + \frac{1}{2}c^2, \\ \therefore \frac{1}{2}(a+b)^2 &= ab + \frac{1}{2}c^2, \\ \therefore a^2 + b^2 &= c^2.\end{aligned}$$

④陈杰的证明：

如图，图中有4个全等的直角三角形（以 a 、 b 为直角边，以 c 为斜边），3个正方形，边长分别为 a 、 b 、 c ，设整个图形面积为 S 。



证明：

$$\begin{aligned}\therefore S &= a^2 + b^2 + 2 \times \frac{1}{2}ab = a^2 + b^2 + ab, \\ S &= c^2 + 2 \times \frac{1}{2}ab = c^2 + ab, \\ \therefore a^2 + b^2 + ab &= c^2 + ab, \\ \therefore a^2 + b^2 &= c^2.\end{aligned}$$

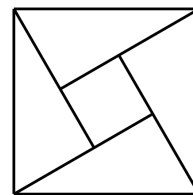
例题

【知识点拨】

勾股定理的四种证明，考试中不是仅仅考察名称，但不是所有的题目都完全按照四种证明的图形考察，所以让学生学会利用分别整体法和分割法去求解图形的面积；其中美国总统詹姆斯·加菲尔德的证明也是全等模型中的一线三垂直。

9. “赵爽弦图”巧妙地利用面积关系证明了勾股定理，是我国古代数学的骄傲，如图所示的“赵爽弦图”是由四个全等的直角三角形和一个小正方形拼成的一个大正方形，设直角三角形较长的直角边

长为 a ，较短的直角边长为 b ，若 $(a+b)^2 = 21$ ，大正方形的面积为13，则小正方形的面积为（ ）。



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】 C

【解析】 $\because (a+b)^2 = 21$,

$$\therefore a^2 + 2ab + b^2 = 21,$$

$\because$ 大正方形的面积为13，

$$\therefore 2ab = 21 - 13 = 8, \text{ 即四个直角三角形的面积为} 8,$$

$$\therefore \text{小正方形的面积为} 13 - 8 = 5.$$

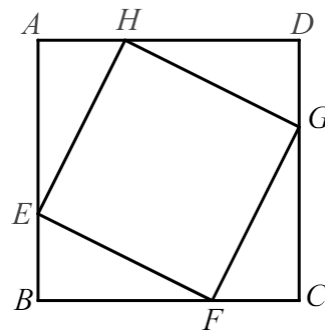
故选：C。

【标注】【知识点】弦图

【重点强调】

2017~2018学年天津河西区初二下学期期中第一学片第11题3分

10. 如图，在正方形 $ABCD$ 的面积为25，在各边上顺次截取 $AE = BF = CG = DH = 3$ ，则四边形 $EFGH$ 的面积是 _____。



【答案】 13

【解析】 易证 $\triangle AEH \cong \triangle BFE \cong \triangle CGF \cong \triangle DHG$,

$$\therefore EH = FE = GF = GH, \angle EHG = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是正方形 ,
 $\therefore ABCD$ 的面积为 25 ,
 $\therefore AB = 5$,
 $\therefore AE = 3$,
 $\therefore BE = 2 = AH$,
 $\therefore$ 正方形 $EFGH$ 面积为 $EH^2 = AE^2 + AH^2 = 3^2 + 2^2 = 13$.

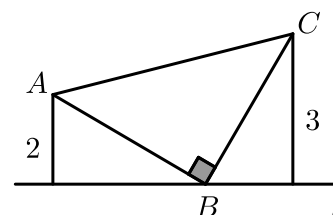
【标注】【知识点】正方形的周长与面积

【知识点】正方形的性质

【知识点】SAS

【知识点】勾股定理与实际问题

11. 如图，直线 l 过等腰直角三角形 ABC 的直角顶点 B ， A 、 C 两点到直线 l 的距离分别是 2 和 3，则 AB 的长是（ ）。

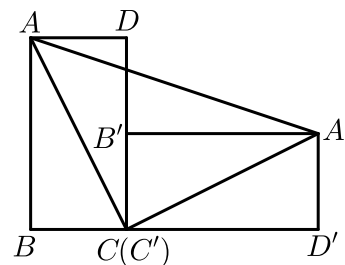


- A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{11}$ D. $\sqrt{13}$

【答案】D

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

12. 如图，将竖直放置的长方形砖块 $ABCD$ 推倒至长方形 $A'B'C'D'$ 的位置，长方形 $ABCD$ 的长和宽分别为 a 、 b ， AC 的长为 c 。



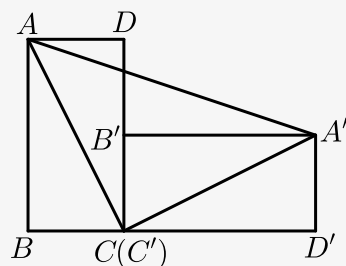
- (1) 你能用只含 a 、 b 的代数式表示 $S_{\triangle ABC}$ 、 $S_{\triangle C'A'D'}$ 和 $S_{\text{直角梯形}A'D'BA}$ 吗？能用只含 c 的代数式表示 $S_{\triangle ACA'}$ 吗？
 (2) 利用 (1) 的结论，你能验证勾股定理吗？

【答案】(1) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab$,
 $S_{\triangle C'A'D'} = \frac{1}{2}ab$,
 $S_{\text{直角梯形}A'D'BA} = \frac{1}{2}(a+b)^2$,
 $S_{\triangle ACA'} = \frac{1}{2}c^2$.

(2) 证明见解析 .

【解析】(1) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab$,
 $S_{\triangle C'A'D'} = \frac{1}{2}ab$,
 $S_{\text{直角梯形}A'D'BA} = (b+a)(a+b) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(a+b)^2$,
 $S_{\triangle ACA'} = \frac{1}{2}c^2$.

(2) 如图可知: $S_{\text{直角梯形}A'D'BA} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle C'A'D'} + S_{\triangle ACA'}$,



即 $\frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$,
 $\therefore (a+b)^2 = 2ab + c^2$,
 $a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2$,
 $\therefore a^2 + b^2 = c^2$.

【标注】【知识点】全等三角形的周长与面积

【知识点】直角三角形

【知识点】求多边形周长与面积

【知识点】勾股定理的证明

【知识点】勾股定理与实际应用

【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

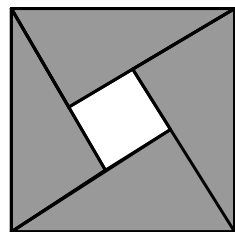
【方法】等面积法

【重点强调】

2017~2018学年天津和平区天津市益中学校初二下学期单元测试《勾股定理》第19题

练习

13. 如图，是2002年8月北京第24届国际数学家大会会标我国古代的数学家赵爽为证明勾股定理所作的“弦图”，它由4个全等的直角三角形拼合而成．如果图中大、小正方形的面积分别为52和4，那么一个直角三角形的两直角边的积等于（ ）．



- A. 12 B. $2\sqrt{3}$ C. 24 D. 10

【答案】 C

【解析】 设两直角边分别为 x, y .

$$\text{根据题意列方程组得} \begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ (y - x)^2 = 4 \end{cases},$$

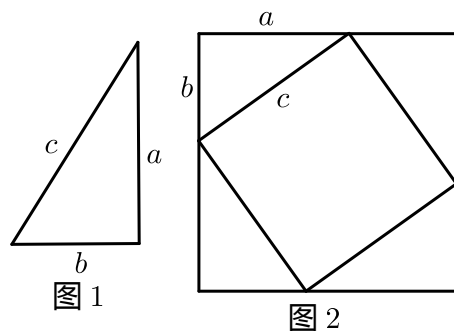
解方程组得： $xy = 24$,

即两直角边的积等于24 .

故选C .

【标注】 【知识点】弦图

14. 用四个完全相同的直角三角形（如图1）拼成一大一小两个正方形（如图2），直角三角形的两直角边分别是 a, b ($a > b$)，斜边长为 c ，请解答：



- (1) 图2中间小正方形的周长 _____，大正方形的周长为 _____ .
- (2) 用两种方法表示图2中大正方形的面积．（用含 a, b, c ） $S =$ _____ .
- (3) 利用 (2) 小题的结果写出 a, b, c 三者之间的一个等式 _____ .
- (4) 根据第 (3) 小题的结果，解决下面的问题：已知直角三角形的两条直角边长分为是 $a = 8$, $b = 6$ ，求斜边 c 的值 .

【答案】 (1) $4c; 4a + 4b$

$$(2) (a+b)^2 \text{ 或 } 2ab + c^2$$

$$(3) a^2 + b^2 = c^2$$

$$(4) 10.$$

【解析】(1)

(2)

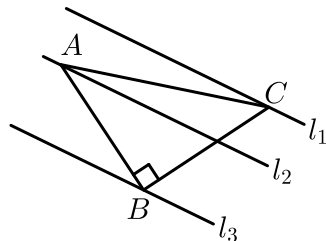
(3)

$$(4) \because c^2 = a^2 + b^2 = 8^2 + 6^2 = 100,$$

$$\therefore c = 10 \text{ (负值不合题意, 舍去)}.$$

【标注】【知识点】勾股定理的证明

15. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$, 三角形的顶点在相互平行的三条直线 l_1, l_2, l_3 上, 且 l_1, l_2 之间的距离为1, l_2, l_3 之间的距离为3, 则点 B 到 AC 的距离 _____.



【答案】 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$

【解析】过 A 作 $AD \perp l_3$ 于 D , 过 B 作 $BF \perp AC$ 于 F , 过 C 作 $CE \perp l_3$ 于 E , 则 BF 的长就是点 B 到 AC 的距离.

$$\because AD \perp l_3, CE \perp l_3,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABC = \angle CEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle ABD = 90^\circ, \angle ABD + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle CBE,$$

在 $\triangle DAB$ 和 $\triangle EBC$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAB = \angle EBC \\ \angle ADB = \angle BEC, \\ AB = BC \end{cases}$$

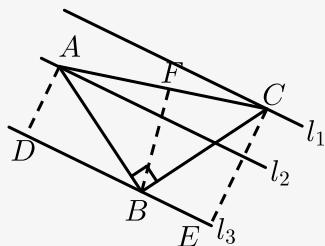
$$\therefore \triangle DAB \cong \triangle EBC (\text{AAS}),$$

$$\therefore AD = BE = 3,$$

$$\therefore CE = 3 + 1 = 4,$$

在 $\triangle CEB$ 中, 由勾股定理得:

$$AB = BC = 5, AC = 5\sqrt{2},$$



由三角形的面积公式得：

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \times BC = \frac{1}{2}AC \times BF,$$

$$\text{即 } 5 \times 5 = 5\sqrt{2}BF,$$

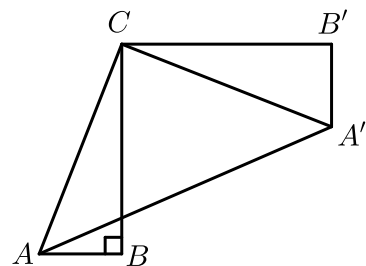
$$\text{即 } BF = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

【标注】【知识点】勾股定理与几何问题；辅助线综合运用

【重点强调】

2017~2018学年3月天津和平区天津市双菱中学初二下学期月考第17题

16. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ， $BC = 4$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° ，得到旋转后的图形 $\triangle A'B'C$ 。



- (1) $\angle BCB'$ 的度数是 _____ (度) .
(2) AC 的长为 _____ .
(3) 求线段 AA' 的长 .

【答案】(1) 90

(2) $2\sqrt{5}$

(3) $2\sqrt{10}$.

【解析】(1) $\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C'$ ，

$$\therefore \angle BCB' = 90^\circ .$$

(2) $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ， $BC = 4$ ，

$$\therefore \text{在Rt}\triangle ABC\text{中，} AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} .$$

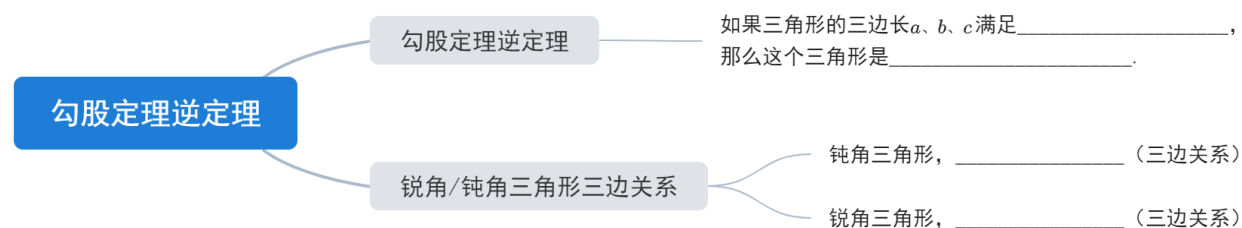
(3) 由题意， $AC = A'C = 2\sqrt{5}$ ， $\angle ACA' = 90^\circ$ ，

$$\therefore \text{在Rt}\triangle ACA'\text{中，} AA' = \sqrt{AC^2 + A'C^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{10} .$$

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

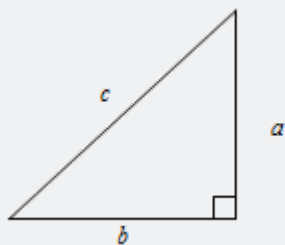
【重点强调】

三、勾股定理逆定理



【教法备注】

1、如果三角形的三边长 a 、 b 、 c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$, 那么这个三角形是直角三角形.

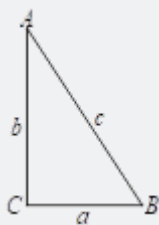


勾股定理的逆定理, 条件是三角形三边长, 结论是直角三角形, 即由边的条件得到角的结论, 所以在几何题中需要进行边角的转换时要联想勾股定理逆定理.

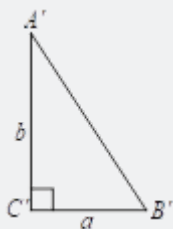
勾股定理的逆定理是判定直角三角形的一个依据, 判断时先确定最大边 (不妨设为 c)

勾股定理逆定理的证明:

如图, 已知 $\triangle ABC$ 的三边 a 、 b 、 c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$, 求证: $\triangle ABC$ 是直角三角形.



证明: 分别以 a 、 b 为直角边, $\angle C'$ 为直角构造 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$,



则由勾股定理得 $A'B'^2 = a^2 + b^2$,

由已知可知 $A'B' = c$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,

$$\therefore \angle C = \angle C' = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

2、三角形三边关系：

①若 $c^2 = a^2 + b^2$ ，则 $\triangle ABC$ 是以 $\angle C$ 为直角的直角三角形；

②若 $a^2 + b^2 < c^2$ ，则此三角形为钝角三角形（其中 c 为最大边）；

③若 $a^2 + b^2 > c^2$ ，则此三角形为锐角三角形（其中 c 为最大边）.

例题

【知识点拨】

勾股定理逆定理中的 a 、 b 、 c 及 $a^2 + b^2 = c^2$ 只是一种表现形式，不能认为是唯一的. 若三角形三边长 a 、 b 、 c 满足 $a^2 + c^2 = b^2$ ，那么以 a 、 b 、 c 为三边的三角形是直角三角形，但是 b 为斜边.



利用勾股逆定理判定

17. 下列各组线段 a 、 b 、 c 中，能组成直角三角形的是（ ）.

A. $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$

B. $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = 2$

C. $a = 1$, $b = 1$, $c = 3$

D. $a = 5$, $b = 12$, $c = 12$

【答案】B

【解析】A 选项： $\because 4^2 + 5^2 \neq 6^2$ ， $\therefore$ 该三角形不是直角三角形，故A错误.

B 选项： $\because 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 2^2$ ， $\therefore$ 该三角形是直角三角形，故B正确.

C 选项： $\because 1^2 + 1^2 \neq 3^2$ ， $\therefore$ 该三角形不是直角三角形，故C错误.

D 选项： $\because 5^2 + 12^2 \neq 12^2$ ， $\therefore$ 该三角形不是直角三角形，故D错误.

故选 B.

【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

【重点强调】

2017~2018学年天津滨海新区初二下学期期末第2题3分

18.

在 $\triangle ABC$ 中, 下列说法: (1) $\angle B = \angle C - \angle A$; (2) $a^2 = (b+c)(b-c)$; (3) $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$; (4) $a : b : c = 5 : 4 : 3$; (5) $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$, 其中能判断 $\triangle ABC$ 为直角三角形的条件有 () .

- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

【答案】 C

【解析】 ① $\because \angle B = \angle C - \angle A, \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$
 $\therefore \angle C = 90^\circ,$
 $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.
 ② $\because a^2 = (b+c)(b-c) = b^2 - c^2,$
 $\therefore a^2 + c^2 = b^2,$
 $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.
 ③ $\because \angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5, \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$
 $\therefore \angle A = 45^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 75^\circ,$
 $\therefore \triangle ABC$ 不是直角三角形.
 ④ $\because a : b : c = 5 : 4 : 3, \therefore$ 设 $a = 5x, b = 4x, c = 3x,$
 $\therefore b^2 + c^2 = (4x)^2 + (3x)^2 = 25x^2, a^2 = (5x)^2 = 25x^2,$
 $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.
 ⑤ $\because a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3,$
 设 $a^2 = x, b^2 = 2x, c^2 = 3x,$
 $\therefore a^2 + b^2 = 3x = c^2,$
 $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

【重点强调】

2017~2018学年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初二下学期期中第5题3分

19. 若 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 + 338 = 10a + 24b + 26c$, 则此三角形为 () .
 A. 直角三角形 B. 钝角三角形 C. 锐角三角形 D. 不能确定

【答案】 A

【解析】 $\triangle ABC$ 是直角三角形.
 $\because a^2 + b^2 + c^2 + 338 = 10a + 24b + 26c,$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 + 338 - 10a - 24b - 26c = 0,$$

$$\therefore (a-5)^2 + (b-12)^2 + (c-13)^2 = 0,$$

$$\therefore a-5=0, b-12=0, c-13=0,$$

$$\therefore a=5, b=12, c=13,$$

$$\therefore a^2=25, b^2=144, c^2=169,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 169,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

故选 A.

【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

【重点强调】

2018~2019 学年天津南开区天津市南开中学初二下学期期中第 2 题 3 分

练习

20. 由线段 a 、 b 、 c 组成的三角形不是直角三角形的是 ().

A. $a=7, b=24, c=25$

B. $a=\sqrt{41}, b=4, c=5$

C. $a=\frac{5}{4}, b=1, c=\frac{3}{4}$

D. $a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{4}, c=\frac{1}{5}$

【答案】D

【解析】A 选项： $7^2 + 24^2 = 25^2$ ，符合勾股定理的逆定理，是直角三角形；

B 选项： $4^2 + 5^2 = (\sqrt{41})^2$ ，符合勾股定理的逆定理，是直角三角形；

C 选项： $1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$ ，符合勾股定理的逆定理，是直角三角形；

D 选项： $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \neq \left(\frac{1}{3}\right)^2$ ，不符合勾股定理的逆定理，不是直角三角形.

故选 D.

【标注】【知识点】勾股定理的逆定理

【重点强调】

2018~2019 学年 6 月天津武清区英华国际中学初二下学期月考第 2 题 3 分

21. 给出下列命题：

- ①在直角三角形 ABC 中，已知两边长为3和4，则第三边长为5；
 ②三角形的三边 a 、 b 、 c 满足 $a^2 + c^2 = b^2$ ，则 $\angle C = 90^\circ$ ；
 ③ $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 5 : 6$ ，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形；
 ④ $\triangle ABC$ 中，若 $a : b : c = 1 : 2 : \sqrt{3}$ ，则这个三角形是直角三角形。

其中，正确命题的个数为（ ）。

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】 B

【解析】 ①在直角三角形 ABC 中，已知两边长为3和4，则第三边长为5或 $\sqrt{7}$ ，故本选项错误；
 ②三角形的三边 a 、 b 、 c 满足 $a^2 + c^2 = b^2$ ，则 $\angle B = 90^\circ$ ，故本选项错误；
 ③ $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 5 : 6$ ，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形，故本选项正确；
 ④ $\triangle ABC$ 中，若 $a : b : c = 1 : 2 : \sqrt{3}$ ，则这个三角形是直角三角形，故本选项正确。
 其中，正确命题的个数为2个；
 故选B。

【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

【重点强调】

2018~2019学年天津河西区初二下学期期中（第三学片）第4题3分

22. 已知 a ， b ， c 为三角形 ABC 的三边，且满足 $a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 8b - 10c + 50 = 0$ ，试判别这个三角形的形状。

【答案】 直角三角形。

【解析】 以 c 为斜边的直角三角形。

【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

例题

锐角、钝角三角形判定

23. 已知锐角三角形的边长是2，3， x ，那么第三边 x 的取值范围是（ ）。

- A. $1 < x < \sqrt{5}$ B. $\sqrt{5} < x < \sqrt{13}$ C. $\sqrt{13} < x < 5$ D. $\sqrt{5} < x < \sqrt{15}$

【答案】B

【解析】首先要能组成三角形，易得 $1 < x < 5$ 。

下面求该三角形为直角三角形的边长情况（此为临界情况），显然长度为2的边对应的角必为锐角（ $2 < 3$ ，短边对小角）则只要考虑3或者 x 为斜边的情况，

3为斜边时，由勾股定理， $2^2 + x^2 = 3^2$ ，得 $x = \sqrt{5}$ 作出图形，固定2边，旋转3边易知当 $1 < x < \sqrt{5}$ 时，该三角形是以3为最大边的钝角三角形，

x 为斜边时，由勾股定理， $2^2 + 3^2 = x^2$ ，得 $x = \sqrt{13}$ ，同样作图可得当 $\sqrt{13} < x < 5$ 时，该三角形是以 x 为最大边的钝角三角形。

综上所述，当 $\sqrt{5} < x < \sqrt{13}$ 时，原三角形为锐角三角形。

故选：B。

【标注】【知识点】求三角形第三边的取值范围

24. 下列长度的三条线段能组成钝角三角形的是（ ）。

A. 3, 4, 4

B. 3, 4, 5

C. 3, 4, 6

D. 3, 4, 7

【答案】C

【解析】A、因为 $3^2 + 4^2 > 4^2$ ，所以三条线段能组锐角三角形，不符合题意。

B、因为 $3^2 + 4^2 = 5^2$ ，所以三条线段能组成直角三角形，不符合题意。

C、因为 $3 + 4 > 6$ ，且 $3^2 + 4^2 < 6^2$ ，所以三条线段能组成钝角三角形，符合题意。

D、因为 $3 + 4 = 7$ ，所以三条线段不能组成三角形，不符合题意。

【标注】【知识点】勾股定理的逆定理

练习

25. 在 $\triangle ABC$ 是锐角三角形， $AB = 5$ ， $AC = 12$ ， $BC = a$ ，则 a 的取值范围是_____。

【答案】 $\sqrt{119} < a < 13$

【解析】锐角三角形满足两边平方和小于第三边平方和，

$$\therefore \begin{cases} 5^2 + 12^2 > a^2 \\ 5^2 + a^2 > 12^2 \\ 12^2 + a^2 > 5^2 \end{cases}$$

解得 $\sqrt{119} < a < 13$ 。

【标注】【知识点】已知两边求第三边-分类讨论

26. 一个钝角三角形的两边长为3、4，则第三边可以为()。

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

【答案】C

【解析】设第三边为 c ，

若这个三角形为直角三角形，则第三边为 $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ，

$\therefore$ 钝角大于直角，

$\therefore c > 5$ ，

$\therefore$ 三角形第三边小于其余两边的和，

$\therefore c < 7$ ，

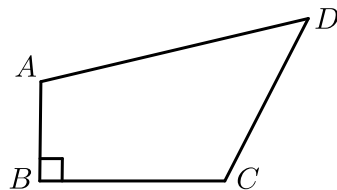
故选C。

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

例题

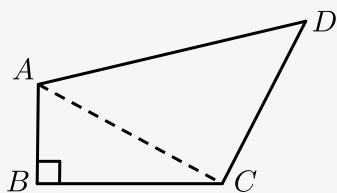
勾股定理、勾股逆定理综合

27. 如图所示，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp BC$ ， $AB = 1$ ， $BC = 2$ ， $CD = 2$ ， $AD = 3$ ，求四边形 $ABCD$ 的面积。



【答案】 $S_{\text{四边形}ABCD} = 1 + \sqrt{5}$ 。

【解析】连接 AC ，



$\therefore AB \perp BC$ ，

$\therefore \angle B = 90^\circ$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, $AB = 1$, $BC = 2$,

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5,$$

$$\therefore AC = \sqrt{5}.$$

$$\therefore CD = 2, AD = 3,$$

$$\therefore AC^2 + CD^2 = 5 + 4 = 9 = AD^2.$$

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ANCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2 = 1 + \sqrt{5}.$$

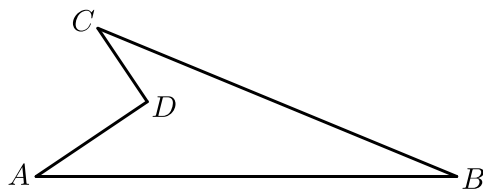
【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

【重点强调】

2017~2018学年天津宝坻区初二下学期期中第22题10分

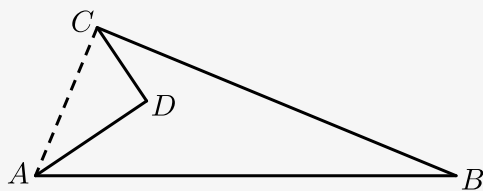
练习

28. 如图所示的一块地, $\angle ADC = 90^\circ$, $AD = 4$, $CD = 3$, $AB = 13$, $BC = 12$, 求这块地的面积 _____.



【答案】 24

【解析】 连接 CA ,



$$\therefore \angle ADC = 90^\circ, AD = 4, CD = 3.$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$= 5.$$

$$\therefore 5^2 + 12^2 = 13^2.$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{\text{面积}} &= S_{\triangle ACB} - S_{\triangle ACD} \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \\ &= 30 - 6 \\ &= 24 .\end{aligned}$$

【标注】【知识点】勾股逆定理的应用

【重点强调】

2017~2018学年天津和平区天津市益中学校初二下学期单元测试《勾股定理》第13题